A KÚPSZELETEK ELMÉLETE ÉS SZERKESZTÉSE PROJEKTÍV GEOMETRIAI MEGVILÁGÍTÁSBAN

ÍRTA: LERNER KÁROLY

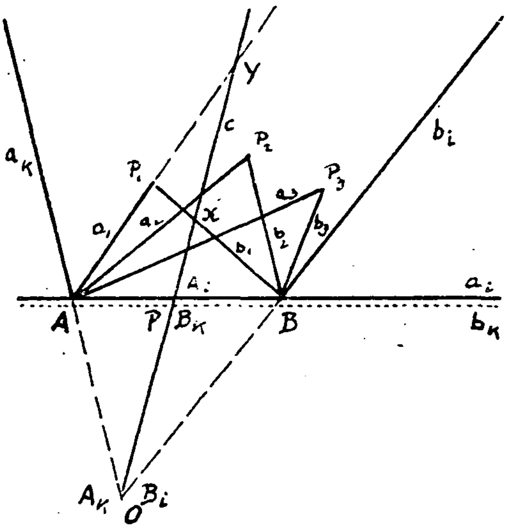
A kúpszeletek definíciója és rendszáma. Legyen adva két projektív sugársor $(a_1 a_2 a_3 \ldots) \barwedge (b_1 b_2 b_3 \ldots)$ A homológ sugarak a_i és b_i meghatározzák P_i pontot, amit így jelölünk $(a_i b_i) = P_i$. Az így keletkezett P_i pontok halmazát nevezzük kúpszeletnek. Tehát a kúpszelet a következő pontokból áll: $K(P_1 P_2 P_3 \ldots)$, amelyek a homológ sugarak metszés pontjai. Ezen pontok halmazát pontkúpszeletnek nevezzük. Kérdés, hogy hányadrendű görbe a kúpszelet, azaz hány közös pontja van egy egyenessel. Legyen c egy tetszőleges egyenes. A c egyenesen a homológ sugarak elempárjai projektivitást létesítenek. Ha c egyenesnek a_i-val való metszéspontját A_i-nek, b_i-vel való metszéspontját B_i-nek nevezem, hol $i = 1, 2, 3, \ldots$-n, akkor c egyenesen létrejön $c(A_1 A_2 A_2 \ldots) \barwedge c(B_1 B_2 B_3 \ldots)$ projektivitás, melynek két kettős eleme van. Ugyanis A_i legyen az c egyenesen, de legyen a kúpszeletnek is pontja. Ha ezt A-ból és B-ből — ami ugyancsak a kúpszeleten van — proiciálom, A_i és társa B_i egybeesnek. Mivel ezen pont homológ sugarak metszéspontja, azért a kúpszeletnek is pontja. Az egyenesen a homológ sugarak még egy kettőspontot létesítenek $A_k = B_k$. Ez is homológ sugarak metszéspontja, mely az c egyenesen, de ugyanakkor a kúpszeleten is rajta van. Több kettőspont nincs ezen az egyenesen, mert több kettőspontot c egyenesen nem létesít az A és B tartójú sugársor. Tehát több metszéspontja nincs egy tetszőleges, a kúpszeletet metsző egyenesnek a kúpszelettel.

A kúpszeletet annyiadrangúnak mondjuk, ahány kettőspont van egy, a kúpszeletet metsző egyenesen a homológ sugarak által létesített projektivitásban. Mivel ez csak kettő van, a kúpszelet másodrendű görbe.

A kúpszeletek nevei. A kúpszelet minden egyenesen, tehát a végtelen távoli egyenesen is, létesít projektivitást, aszerint, hogy az hiperbolikus, elliptikus vagy parabolikus, hiperboláról, ellipszisről, illetőleg paraboláról beszélünk.

A hiperbolánál a_i és b_i és a végtelen távoli c egyenes a végtelenben metszik egymást $a_i \parallel b_i$. Ebben az esetben két párhuzamos homológ pár van. Ha csak egy párhuzamos homológ pár van, akkor parabola, ha egy sincs, akkor ellipszis a kúpszelet.

A kúpszelet érintőinek definiálása. Ha két sugársor van adva, amelyeknek tartói A és B, akkor a két sugársor tartója, A és B rajta van a kúpszeleten, mert ezek is homológ sugarak metszéspontjai. Tehát a kúpszelet P_i pontjai között megvan a két sugársor tartója A és B is, mert minden a_k sugár társa b_k sugár, de ezek homológ társak és A-ban metszik egymást. De ho-



mológtársak metszéspontjai alkotják a kúpszeletet, tehát A pontja a kúpszeletnek. Az a_i és b_i sugarak B-ben metszik egymást, tehát B is pontja a kúpszeletnek.

Az a_k sugárnak az a sajátsága, hogy rajta van a kúpszelet A pontja és rajta van a_k és b_k homológ sugarak metszéspontjai is, de ezen két pont egybeesik: A és $(a_k b_k) = A$ pont. Ezen egyenesen van tehát egy kettőspont. Az ilyen a_k egyenest érintőnek nevezzük. b_i-n is van két pont, mely egybeesik: a kúpszelet B pontja és $(a_i b_i) = B$ pont. Ez is érintő tehát. Röviden azt mondhatjuk, hogy a közös $a_i b_k$-hoz tartozó társak érintők. Ebből az is látható, hogy az érintőnek, a_k-nak és b_i-nek sajátsága az, hogy homológ társaik egybeesnek. A és B-hez tartozó minden sugár hiperbolikus. Ha c egyenest úgy vesszük fel, hogy a két érintő metszéspontján O-n menjen át, akkor ezen a projektivitás involúciós lesz. c-én van egy metszéspont, ahol c metszi a kettős egyenest. A-ból a_i és B-ből b_i az a_i-nak társa indul ki. — c egyenest az a_i és b_i homológ sugárpár A_i, ill. B_i pontokban metszi. — Ezen pontokon a_k, ill. b_k egyenes is átmegy, a_k átmegy B_i-n és b_k átmegy A_i-n. Ezen sugarakból c egyenes az A_k és B_k pontokat metszi ki, amelyek az előbbi pontokkal, A_k és B_k-val rendre összeesnek. Tehát c-én van egy pont, melynek homológ társa ugyanaz, akármelyik pontsorhoz számítjuk. Tehát a projektivitás c egyenesen involúció.

Az $a_i a_k \barwedge b_i b_k$, de c által belőlük kimetszett pontok $A_i A_k \barwedge B_i B_k$. Mivel c-én a projektivitás involúció, igaz ez:

$$(K_1 K_2 O P) = -1. \quad (K_1 K_2 A_i B_i) = -1 = (K_1 K_2 P O) = -1.$$

$$(K_1 K_2 A_k B_k) = -1 = (K_1 K_2 O P) = -1 = (K_1 K_2 P O) = -1$$

$$(K_1 K_2 A_i B_i) = -1.$$

Tehát általában azt mondhatjuk, hogy $(K_1K_2A_iB_i) = -1$, ahol A_i és B_i fel is cserélhetők. Ez pedig azt mondja ki, hogy ha O ponton egy tetszőleges c egyenest veszünk fel, ez kimetsz a kúpszelet metsző egyeneséből P pontot, mely O-val együtt harmonikusan választja szét a kúpszeletnek c egyenessel való metszéspontjait. Az ilyen O pontot pólusnak és a kúpszeletet metsző egyenest az O pont polárisának mondjuk. Két egyenest konjugáltnak nevezünk, ha az egyik átmegy a másiknak a pólusán. Tehát c egyenes a kúpszeletet metsző egyenesnek konjugáltja.

Az AB egyenes azonban nem más, mint az érintési húr, a_k és b_i pedig a végpontjaihoz tartozó érintő. Ezért a már mondottak alapján azt is mondhatjuk, hogy az érintési húr a végpontjaihoz húzott két érintő metszéspontjainak a polárisa, a két érintő metszéspontja O pedig az érintési húr pólusa, vagy hogy a kúpszelet minden szelőjének van pólusa. Ha A és B közelednek egymáshoz és ha már a határhelyzetben végtelen közel esnek, akkor AB húr maga az érintő és a két érintő metszéspontja az érintési pont. Ekkor az érintő a poláris és az érintési pont a pólus.

Az O ponton felvett c egyenesen a projektivitás involúció. A homológ sugarakból kimetszett pontok X és Y. Ezeket a kúpszeletre nézve involúciós, vagy konjugált pároknak nevezzük. Ha P_i mozog, X és Y is mozog és az involúciót c egyenesen teljesen leírja. P_1AB kúpszelet pontjai egy, a kúpszeletbe írható háromszöget alkotnak, mely AB oldalának pólusán O-n levő c egyenesek a másik, két oldalból konjugált párokat metszenek ki. Ez *Staudt* tétele. X és Y az c egyenesen konjugált párok. Ha az c egyenes konjugált párjait A-ból és B-ből proiciáljuk, e proiciáló sugarak a kúpszeleten metszik egymást. Ez c egyenes akármelyik két konjugált párjára igaz. A konjugált párokat proiciáló egyeneseket a kúpszeletbe írható háromszög két oldala adja. (Lásd 1. rajz.)

AB szelő pólusán levő egyeneseken a kúpszelet indukálta involúciós társakat, vagy konjugált párokat A-ból és B-ből proiciáló egyenesek a kúpszeleten találkoznak. Ez *Staudt* tételéből következik.

Ha megadjuk a kúpszelet polárisát és pólusát, ezzel a konjugált párok megszerkeszthetők, vagyis ezzel adva van az involúció. Minden X-nek társa Y megszerkeszthető. Ha viszont ismerem az involúciós társakat, ezzel a kúpszelet is adva van. Nehezebb eset, amikor a szelő nem metszi, de nem is érinti a kúpszeletet. Ekkor is létrejön involúció, de más természetű. Ekkor nincs kettőspont. Hogy az involúciót ekkor hogyan adjuk meg, azt később tárgyalom.

Vonalkúpszelet. Legyen a és b egyenesen két projektív pontsor: $a(A_1A_2A_3) \barwedge b(B_1B_2B_3)$ a homológ pontpárok meghatározta p_i egyenesek halmazát nevezzük vonalkúpszeletnek. A vonalkúpszelet osztályszáma az a szám, amely megmondja, hogy egy felvett C ponton a kúpszeletnek hány egyenese megy át. A felvett C pont a homológ pontpárokkal egy projektivitás homológ sugárpárjait határozza meg. $CA_i = a_i$ és $CB_i = b_i$. Mit jelent egy kettős egyenes? Azt jelenti, hogy $a_k = CA_k = b_k = CB_k$ egyenes, de akkor A_k és B_k rajta van $a_k = b_k$ egyenesen. Ez a kettős egyenes még C pontot is kell hogy tartalmazza. Tehát $A_kB_kC = p_k$ homológ pontokat összekötő egyenes, vagyis a kúpszeletnek egyenese. A projektivitásnak két kettős eleme van, tehát két egyenes rajzolható C pontból a kúpszelethez és így a kúpszelet másodrendű görbe.

A pontok osztályozása: a vonalkúpszelet a sík összes pontjait osztályozza. Egy pontot olyannak mondunk, amilyen a rajta levő projektivitás. Ha a pont olyan, hogy belőle két érintő vonható a kúpszelethez, akkor az a pont hiperbolikus pont. Ha a pont olyan, hogy belőle csak egy érintő vonható a kúpszeleten, akkor az ilyen pontot parabolikus pontnak nevezzük. Ha a pont olyan, hogy belőle egy érintő sem vonható a kúpszelethez, akkor a pont elliptikus pont. Eszerint a kúpszeleten kívül levő pontok a hiperbolikus pontok, a kúpszeleten levő pontok a parabolikus pontok és a kúpszeleten belül levő pontok az elliptikus pontok.

A pontkúpszeletet öt pontja határozza meg. Ennek igazolása csak a *Steiner* tétel segítségével lehetséges, mely így szól: Ha a kúpszelet két tetszőleges pontjából a kúpszelet többi pontjait proiciáljuk, akkor a homológ sugárpárok egy projektivitást határoznak meg.

Legyen adva öt pont: $ABCDE$. Meghatároznak-e ezek egy kúpszeletet? Az öt pont közül kiválasztunk kettőt: A és B-t és ezekből proiciáljuk a másik három pontot. Így három sugárpárt nyerünk, ez meghatároz egy projektivitást és a homológsugarak metszéspontjai egy kúpszeleten lesznek. $A(CDE) = B(CDE)$. Ez egy K kúpszelet, melynek pontjai $ABCDE$. Ha C és D-ből proiciáljuk a másik három pontot $C(ABE) = D(ABE)$. Ekkor ismét két projektív sugársort nyerünk. Ezek metszéspontjai kúpszeletet határoznak meg. Legyen a kúpszelet K' kúpszelet, melynek pontjai $CDABE$. Ez ugyanaz a kúpszelet, mint K kúpszelet, mert K' kúpszelet pontjait tartalmazza K kúpszelet, csak most a sorrend más.

A kúpszeletek megadási módjai. Adva van $ABCDE$, öt pont. D legyen egyenlő E.

Kérdés, megszerkeszthető-e a kúpszelet?

A kúpszelet két projektív sugársor metszőpontjaiból tevődik össze. Kérdés, melyik pontot válasszuk a sugársorok tartójának? Vegyük D-t és E-t. $D(ABC) \barwedge E(ABC)$. Ez így nem határoz meg kúpszeletet, mert a két sugársor egybeesik. Legyen a tartó D és C. Ekkor $D(ABE) \barwedge C(ABE)$. Ebből látható, hogy DE sugár a közös sugárnak CE-nek homológ társa. Tehát DE kettőspontbeli érintő. — Ezzel adva van a parabolikus involúció és három egyenesnek társa. Ha tehát egy egyenesen adva van a parabolikus involúció és még három pont, a kúpszelet megszerkeszthető.

Essék most össze BC és ED. Ekkor adva van két érintő. Ezen adva van a parabolikus involúció. Adva van még A. Ez öt pont. Tehát a kúpszelet megszerkeszthető.

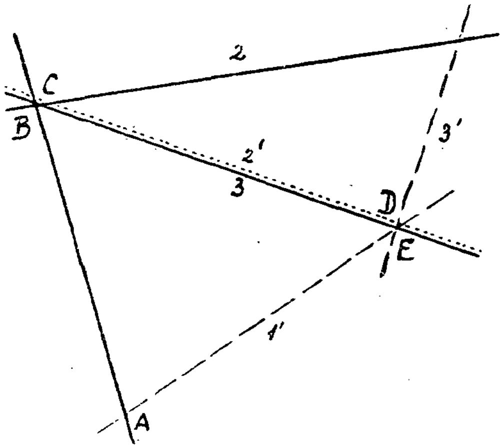
Parabolikus az érintőn az involúció, mert minden pont társa BC-ben, illetve DE-ben van.

Legyen az egyenesen elliptikus az involúció. Ennek a kúpszelettel két képzetes metszéspontja van. Megadok még három pontot, ABC. Ez aequivalens azzal, hogy ha a kúpszeletnek három valós és két képzetes pontja van adva. Ez öt pont, a kúpszelet megszerkeszthető.

Adva van az egyenesen a hiperbolikus involúció és ABC pontok. A kúpszelet ekkor átmegy az egyenesnek a kúpszelettel való metszéspontján és az adott három ponton. Ez öt pont, a kúpszelet megszerkeszthető.

Adva van két egyenesen az involúció, pl. elliptikus involúció. Megadok még egy A pontot. Ezzel négy képzetes metszéspontot adtam meg és egy A pontot. Ez öt pont, a kúpszelet megszerkeszthető.

Adva van a kúpszeletnek ABC pontja és a végtelen távoli egyenesen az involúció, tehát adva van az egyenesen két kettőspont. Ezek legyenek $+i$ és $-i$. A végtelen távoli egyenesen tehát olyan involúciót adtam meg, melynek kettőspontjai $+i$ és $-i$. Ez öt pont, a kúpszelet megszerkeszthető. Ez a kúpszelet kör lesz.



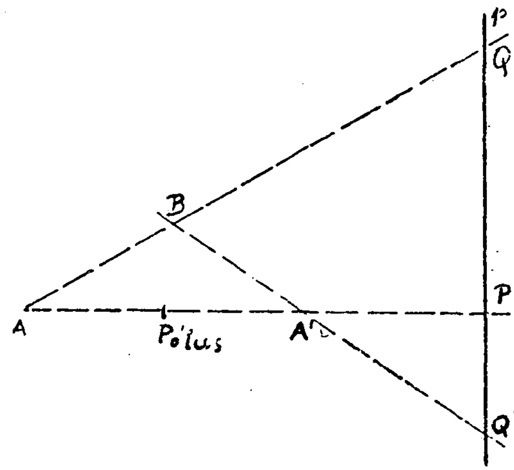
Adva van a végtelen távoli egyenesen az involúció és egy A pont, megszerkesztendő a kúpszelet. Lényegében adva van két kettős pont, a hozzájuk tartozó érintők, de metszéspontjuk a végesben van és ez a végtelen távoli egyenesnek a pólusa. Ha adva van a végtelen távoli egyenesen az involúció és ennek pólusa, akkor a két kettőspont négy pontnak számít, ha még egy pont adva van, ez öt pont és így a kúpszelet megszerkeszthető.

A kúpszeletek szerkesztése. A kúpszeletek szerkesztése azon alapszik, hogy a BC húr és konjugáltján levő involúció meghatározzák a kúpszeletet. A szerkesztéshez öt pont kell.

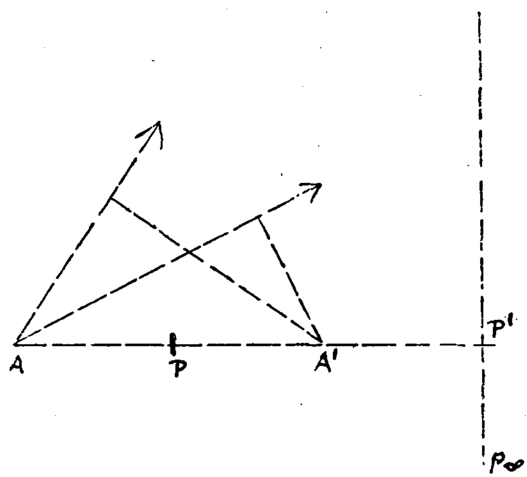
1. Adva van p egyenesen az elliptikus involúció, ennek az egyenesnek P pólusa és még A pont, megszerkesztendő a kúpszelet. Ha p-én adva van az involúció és még az egyenes pólusa P, ez a kúpszelet négy pontját jelenti. P-ből meghúzható a két érintő. Ezek az adott involúció két kettőspontján mennek keresztül. Egy érintési pont két pontnak számít és így a két érintési pont, azaz az adott involúció két kettőspontja a kúpszelet négy pontját adja. Megjegyzendő azonban, hogy csak akkor számít négy pontnak az adott involúció két kettőspontja, ha adva van p egyenes pólusa is. Ha még adva van a kúpszelet A pontja, ez összesen öt pont s így a kúpszelet megszerkeszthető. Azt az esetet tárgyalom, amikor az elliptikus involúció van adva p egyenesen (lehetne hiperbolikus vagy parabolikus is). P pontot összekötve az involúció két képzetes kettőspontjával, a P pontban a kúpszelethez húzható két képzetes érintőt nyerjük.

A szerkesztés így történik: P-ét összekötjük A-val. PA egyenes metszi p egyenest P' pontban. PP' pontok harmonikusan választják szét A és társát A'-át. Így A-nak társa A' megszerkeszthető.

Ha AA' húr végpontjaiból, A-ból és A'-ből proiciáljuk p egyenesen levő involúció homológ társait, — mivel AA' húrnak konjugáltja p egyenes —, a proiciáló sugarak a kúpszeleten metszik egymást. B pontja a kúpszeletnek.



2. Adva van a végtelen távoli egyenesen a körös involúció, pólusa P és A pont. Ez összesen öt pont. A kúpszelet megszerkeszthető. Ezen involúciónak az a sajátsága, hogy a társakat proiciáló sugarak merőlegesek egymásra. A szerkesztés az előző szerkesztés alapján történik. P-ét összekötjük A-val. Ezen egyenes kimetszi p_∞-ből P' pontot, mely P pólusnak homológ társa.

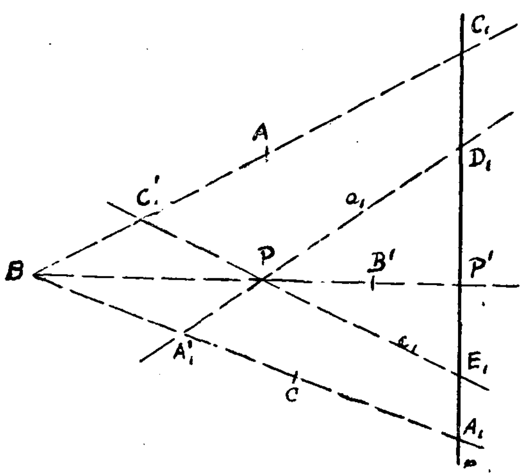


P és P' harmonikusan választják szét A és társát, A'-öst, így A' megszerkeszthető. p_∞ konjugáltja AA' húrnak. A és A'-ból proiciáljuk p_∞-en adott involúció involúciós társait. Ezen proiciáló sugarak a kúpszeleten metszik egymást.

Mivel az involúciónak az a sajátsága, hogy a homológ társakat A és A'-ból proiciáló sugarak merőlegesek egymásra, azért ez a kúpszelet kör, melynek centruma P és a kerületi szögek 90°-osak. Ha A pontot máshol veszem fel, egy másik kört nyerek, amelynek középpontja ugyancsak P lesz. Így nyerem a koncentrikus köröket, melyeknek az a sajátsága, hogy $+i$ és $-i$-ben közös érintőjük van.

3. Adva van egy egyenesen az elliptikus involúció és három pont, ABC, megszerkesztendő a kúpszelet. Az involúció két kettőspontja a kúpszeletnek két pontja. Meg kell jegyezni, hogy egy involúcióban a kettőspontok csak akkor számítanak négy pontnak, ha adva van az involúciót tartó egyenes pólusa. Tehát jelen esetben az involúciónak két kettőspontja egy kúpszeletnek csak két pontját képviseli. Kellett ezért még három pont, ABC, ez összesen öt pont, a kúpszelet megszerkeszthető. A szerkesztést az előbbire vezetjük vissza:

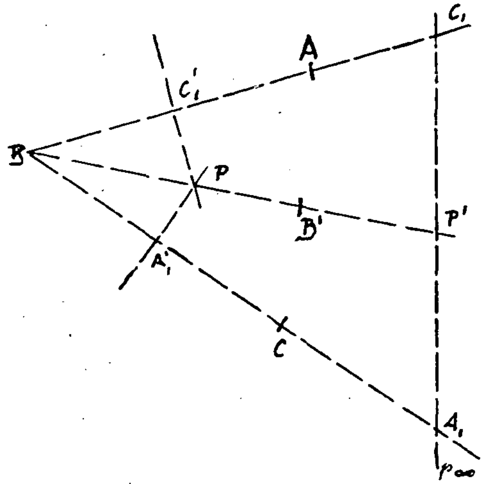
BC-én át húzzunk egy egyenest. Ez metszi p egyenest, amin az elliptikus involúció van adva A_1 pontban. A_1 pontnak megszerkesztjük B; C-re a harmonikus társát, legyen ez A_1'. Legyen A_1-nak az involúciós társa D_1. Ha A_1'-öt D_1-el összekötjük, nyerjük a_1 egyenest, ami az A_1-nek polárisa. Kössük össze A-át B-vel. AB egyenes metszi p egyenest C_1 pontban. C_1-nek harmonikus társa C_1' az A; B-re vonatkozóan megszerkeszthető. C_1-nek p-én levő involúciós társa ismeretes, mert az involúció adva van, legyen ez E_1. Tehát



C_1-nek C_1' is és E_1 is társa. Tehát $C_1'E_1$ egyenes polárisa C_1-nek: $C_1'E_1 = c_1$. Ennek a két $A_1'D_1 = a_1$ és $C_1'E = c_1$ egyenesnek metszéspontja P. Ezen P pontnak C_1 és E_1 is konjugáltja, tehát P pólusa p egyenesnek. Ezzel a szerkesztés az első szerkesztésre van visszavezetve. B-ét összekötjük P-vel, nyerjük BP egyenest, mely egyenes p-ből P' pontot metszi ki. P és P' harmonikusan választják szét BB' pontokat. Tehát B-nek társa B' megszerkeszthető. BB' kúpszeletnek egyik húrja és p egyenes BB' húrnak konjugáltja. Ha B és B'-ből proiciáljuk p-én levő involúciót, akkor az involúciós társakat proiciáló sugarak a kúpszeleten metszik egymást.

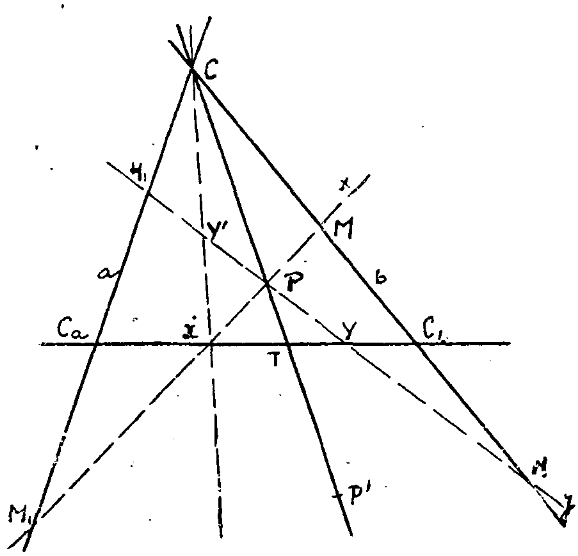
4. Legyen a végtelen távoli egyenesen adva a körös involúció és még három pont: ABC, ez összesen öt pont, a kúpszelet megszerkeszthető. A szerkesztés az előző szerkesztés alapján történik:

B-ét összekötjük A-val, ez metszi p_∞-et C_1 pontban. C_1-nek harmonikus társa C_1' a BA szegmentum felében van. C_1'-ben merőlegest emelve BA-ra, nyerjük C_1 involúciós társát p_∞-en. BC metszi p_∞-et A_1-ben. Ennek harmonikus társa BC felében A_1'-ben van és A_1'-nek involúciós társát, p_∞-ből A_1'-ben



BC-re emelt merőlege metszi ki. A két merőleges egyenes metszéspontja p_∞-nek pólusa. Most már megvan a p_∞ pólusa, a szerkesztés az első szerkesztés alapján történik. Ez a kúpszelet is — mint látható — kör lesz.

5. Adva van két egyenesen az elliptikus involúció, ez a kúpszelet négy pontját határozza meg. Meg kell adni még egy P pontot. Tehát olyan kúpszeletet kell szerkeszteni, mely átmegy a két adott involúció kettőspontjain és az adott P ponton.



$(ab) = C$ pontot, ha a pontsorhoz számítom, van involúciós társa C_a. Ha C-ét b pontsorhoz számítom, társa C_b.

A $\overline{C_a C_b}$ meghatározta egyenes C-nek polárisa, mert C-nek két konjugált társán megy át. CP egyenes $C_a C_b$ egyenest metszi T pontban. C és T harmonikusan választják szét P-ét és társát P'-öt. Így P' megszerkeszthető. P és P' a kúpszeletnek pontja. PP' és $C_a C_b$ egyenesek konjugáltak, mert egyik átmegy a másik pólusán. PP' a kúpszelet egyik húrja. Ha ennek $C_a C_b$ konjugáltján ismerjük az involúciót, akkor azt P és P'-ből proiciáló sugarak a kúpszeleten metszik egymást. Meg kell tehát $C_a C_b$-én a kúpszelet által indukált involúciót szerkeszteni. Ezért P-ből proiciáljuk a és b-én levő involúciókat $C_a C_b$-re. Ezzel ezen két elliptikus involúciót nyerünk, mert ha elliptikus volt az involúció a és b-én, akkor P-ből való proiciálás után $C_a C_b$-én is elliptikus involúciókat nyerünk. Ennek a $C_a C_b$-én levő két elliptikus involúciónak van közös pontpárja: XY. Proiciáljuk X-et és Y-ont P-ből, így nyerjük: MNM_1N_1 pontokat. Az X-et proiciáló sugarat x-nek, az Y-ont proiciáló sugarat y-nak nevezzük. x és y a kúpszelet P pontjában metszik egymást. Tehát rajtuk a projektivitás perspektivitás. Az x egyenes M pontjának konjugáltja y egyenes N pontja és x egyenes M_1 pontjának y egyenes N_1 pontja konjugáltja. Tehát a perspektivitás centruma $MN = b$ és $M_1N_1 = a$ egyenesnek metszéspontja $(ab) = C$, de akkor C-án átmenő egyenesek x és y egyenesekből konjugált pórokat metszenek ki. Kössük össze x egyenesnek és $C_a C_b$ egyenesnek metszéspontját C-vel. Ez az egyenes y-ont metszi Y' pontban. Y' konjugáltja X-nek, de C is konjugáltja X-nek, ezért CY' egyenes polárisa X-nek, ami keresztül megy X ponton, tehát X a kúpszeletnek pontja. Ugyanígy belátható, hogy Y is pontja a kúpszeletnek. De ekkor $C_a C_b$ egyenesen az involúció hiperbolikus, melynek kettőspontja X és Y. Ha P és P'-ből proiciáljuk $C_a C_b$-én levő involúciót, a proiciáló sugarak a kúpszeleten metszik egymást. Ezzel a kúpszeletet megszerkesztettük.

Célul azt tűztem ki, hogy a lényeget felölelő elméleti áttekintés után a szerkesztési feladatok megoldásával rámutassak a kúpszeletek szerkeszthetőségének módozataira.

IRODALOM

[1] L., *Cremona:* Elemente der projektivischen Geometrie. Stuttgart, 1882.
[2] K., *Doehlemann:* Projektive Geometrie in syntetischer Behandlung II. Berlin, 1924.
[3] F., *Enriques:* Vorlesungen über projektive Geometrie. Leipzig, 1905.
[4] *Klug* L.: Projektiv Geometria. Budapest, 1903.

ТЕОРИЯ И ПОСТРОЕНИЕ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ ПРИ СВЕТЕ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

К. Лернер

После установления дефиниции и порядкового числительного конических сечений автор занимается названиями и определением касательных конических сечений. Потом он трактует о понятии линейного конического сечения. После трактата о способе задания конического сечения он изучает различные случаи построения конических сечений.

THEORIE DER KEGELSCHNITTE UND DEREN KONSTRUIERUNG IN PROJEKTIV GEOMETRISCHER BELEUCHTUNG

von

K. LERNER

Nach der Definition und der Bestimmung der Ordnungszahl der Kegelschnitte beschäftigt sich der Verfasser mit den Namen der Kegelschnitte und der Definition ihrer Tangenten. Nun folgt die Behandlung des Begriffs der Kurve zweiter Klasse. Nach Behandlung dessen, wie der Kegelschnitt angegeben wird, untersucht der Verfasser verschiedene Fälle der Konstruierung von Kegelschnitten.